EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

X—15 JULI 1964

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven. Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.*

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

MEDEDELING

Tengevolge van de stijging van de druk- en bindkosten en de binnenkort intredende verhoging van de portokosten zijn wij genoodzaakt de abonnementsprijs van het tijdschrift Euclides met ingang van de 40e jaargang te verhogen van f 8,— tot f 8,75, terwijl voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde de prijs van f 6,75 gebracht wordt op f 7,50.

N.V. ERVEN P. NOORDHOFF
UITGEVERS TE GRONINGEN

Postbus 39
Telefoon 23812
Giro 806593

O. BOTERINGESTRAAT 12

Groningen, juli 1964

L.S.,

Tengevolge van de stijging van de druk- en bindkosten en de recentelijk ingetreden verhoging van de portokosten zijn wij, zeer tot onze spijt, genoodzaakt de abonnementsprijs van het tijdschrift "Euclides" met ingang van de veertigste jaargang te verhogen.
De abonnementsprijs wordt nu gebracht van f 8.-- op f 8.75, terwijl voor hen, die tevens geabonneerd zijn op het "Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde" de abonnementsprijs nu gebracht wordt van f 6.75 op f 7.50.

Uw abonnementsgelden kunnen overgemaakt worden op ons
* gironummer 806593 of via een onzer banken.

Wij vertrouwen, dat U gezien het bovenstaande, deze verhoging kunt billijken.

Hoogachtend,
N.V. ERVEN P. NOORDHOFF

N.B. Deze regeling is niet van toepassing op de leden van "Wimicos", "Liwenagel" en de wiskunde werkgroep "W.V.O.".

INHOUD VAN DE 39STE JAARGANG

ARTIKELEN

VOORDRACHTEN

KORRELS

RAPPORTEN EN VERSLAGEN

DIVERSEN

BESPREKING EN AANKONDIGING VAN BOEKEN EN TIJDSCHRIFTEN

Besproken boeken:

VERSLAG VAN DE "INTERNATIONAL WORKING SESSION ON NEW METHODS IN THE TEACHING OF MATHEMATICS" VAN DE O.E.S.O.

1. Door de Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling (O.E.S.O., vroeger O.E.E.S.) werd van 17 tot en met 23 november 1963 te Athene een congres gehouden over "New Methods in the Teaching of Mathematics". Er waren een vijftigtal deelnemers, afgevaardigd door 21 landen. Ondergetekende vertegenwoordigde Nederland, daartoe aangewezen door de minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen.

Dit als "working session" aangekondigde congres had de bedoeling de resultaten te bespreken van proefnemingen met nieuwe leerstof. Hierbij werd in de eerste plaats gedacht aan de proefnemingen die naar verwachting in verschillende landen zouden zijn ondernomen naar aanleiding van vroegere aanbevelingen van de zijde van de O.E.E.S. (zie het rapport: Verslag van het seminarium "New Thinking in School Mathematics" van de O.E.E.S., Euclides **35**, 218—229, dat betrekking heeft op het congres te Royaumont in december 1959). Beschouwingen over andere proefnemingen of over anderzijds gedane voorstellen waren echter niet van de discussies uitgesloten, en ook waren er beschouwingen beoogd over de opleiding van de wiskundeleraar.

Dit rapport wil objectief zijn. Ik onthoud mij daarom zoveel mogelijk van commentaar, in het bijzonder wat betreft de plaats die Nederland te midden van de andere landen van de O.E.S.O. blijkt in te nemen.

2. De volgende lezingen stonden op het programma.

W. Servais (België), *Een modern programma voor het wiskundeonderwijs in de natuurwetenschappelijke afdeling van de middelbare school.*

G. Papy (België), *Middelen en technieken bij het onderwijs in moderne wiskunde in de lagere klassen van de middelbare school.*

M. Pollak (U.S.A.), *Toepassingen van moderne middelbareschoolwiskunde.*

L. Råde (Zweden), *Onderwijs in kansrekening en statistiek op de middelbare school.*

M. Beberman (U.S.A.), *Op zoek naar structuren.*

H. Athen (Duitsland), *Wiskunde als een van de humaniora.*

A. Revuz (Frankrijk), *De wiskunde die een wiskundeleraar moet kennen.*

H. Fehr (U.S.A.), *De voortgezette wiskundige vorming van in functie zijnde wiskundeleraren.*

Bovendien waren er voordrachten van elk tien minuten over speciale onderwerpen, zoals verzamelingen, vectoren, groepen, enz. Een ochtend werd besteed aan het bijwonen van een wiskundeles in een middelbare school. Er was een excursie naar het oude Korinthe, en een ontvangst door het gemeentebestuur van Athene. Voorzitter van de conferentie was Prof. C. P. Papaioannou, vice-president van de Universiteit van Athene. Prof. H. Fehr was algemeen rapporteur en zal voor de publikatie van een volledig rapport zorg dragen. De conferentie werd geopend in de aula van de universiteit door een vertegenwoordiger van de minister van onderwijs.

3. Door elk land werd een opgave gedaan van de experimenten met onderwijs in moderne wiskunde, die men bezig is te doen. In de volgende landen bleken experimentele cursussen in moderne schoolwiskunde in georganiseerde vorm te worden gegeven: België, Canada, Denemarken, Duitsland, Engeland, Frankrijk, Griekenland, Italië, Luxemburg, Noorwegen, Portugal, U.S.A., Spanje, Zweden, Zwitserland. Bij deze cursussen worden speciaal daartoe samengestelde teksten gebruikt of zelfs reeds gedrukte leerboeken die een modern karakter hebben. Er zijn drie landen, waar in de school nog geen georganiseerde proefnemingen zijn gedaan: Ierland, Nederland en Oostenrijk.

4. Om een indruk te geven van de richting waarin de experimenten gaan, geef ik hier het programma weer, dat gevolgd wordt bij de experimenten die in de Scandinavische landen worden gedaan onder auspiciën van een door deze landen gemeenschappelijk ingestelde commissie. Tot nu toe zijn er elf experimentele cursussen verschenen, en spoedig zullen daar nog vier aan worden toegevoegd. Hier volgt een beschrijving van de inhoud van de elf cursussen.

Klas 1. Gebruik van de verzamelingsnotatie. De symbolen $=$, $>$, $<$ en $\neq$ worden vóór de optelling ingevoerd.

Klas 7—9, meetkunde (twee delen). Het eerste deel bevat oefeningen in tekenen en meten. In het tweede deel worden afbeeldingen zoals spiegeling, rotatie en verschuiving ingevoerd. Een volledig stelsel axioma's, gebaseerd op de reële getallen, wordt gegeven. Enkele belangrijke stellingen worden door middel van een deductieve redenering bewezen. Enige ruimtemeetkunde, gelijkvormigheid en berekeningen van oppervlakten en inhouden worden behandeld.

Klas 7—9, algebra (drie van de vijf delen zijn klaar). Termen en symbolen van de verzamelingsleer worden in alle drie delen vrijelijk gebruikt. Het eerste hoofdstuk bevat voorbeelden van „operaties", en vervolgens worden de grondeigenschappen van de getalbewerkingen behandeld, waarbij achtereenvolgens de positieve gehele getallen worden uitgebreid met de rationale, de negatieve en de reële getallen. De begrippen „volzin" en „open volzin" (= volzinsfunctie) worden gebezigd bij het oplossen van lineaire vergelijkingen, ongelijkheden en stelsels vergelijkingen. Er wordt veel met eindige verzamelingen gewerkt. Benaderende waarden, de rekenliniaal, en begrippen uit de beschrijvende statistiek worden behandeld. Relaties en functies worden ingevoerd als verzamelingen van geordende paren, en er worden talrijke voorbeelden gegeven van afbeeldingen en van het toepassen van functies.

Klas 10—12 (gymnasium), *meetkunde* (drie delen). De basis wordt gevormd door de vectoren. Het eerste deel behandelt vectoren in een vlak, parallel-coördinaten, inwendig produkt en goniometrie. Het tweede deel behandelt de analytische meetkunde van de rechte lijn. Het derde deel gaat over vectoren in de ruimte, rechthoekig coördinatenstelsel, en bevat een korte behandeling van kegelsneden en berekening van inhouden.

Klas 10—11 (gymnasium), *algebra* (twee delen). Bij het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden worden weer de termen en symbolen van de verzamelingsleer gebezigd. Benaderende waarden, logaritmen, polynomia, factorstelling, rijen en inleiding tot reeksen.

Klas 10—12 (gymnasium), *differentiaal- en integraalrekening.* Limiet, continuïteit en afgeleide worden streng behandeld door middel van het begrip „omgeving". Bepaalde integraal, logaritmen en machten. Toepassingen van differentiëren en integreren. Vectorfuncties en benaderingen door middel van polynomia.

Klas 11—12 (gymnasium), *differentiaalvergelijkingen.* Lineaire vergelijkingen van de eerste en de tweede orde. Existentiebewijzen.

Klas 11—12 (gymnasium), *kansrekening en statistiek.* Het eerste hoofdstuk gaat uit van de klassieke definitie van „kans" en bespreekt het ontoereikend zijn hiervan. Het tweede hoofdstuk behandelt eindige uitkomstenruimten, waarbij uiteraard het begrip „verzameling" weer wordt toegepast, verwachtingswaarde en variantie van stochastische variabelen. Het derde hoofdstuk gaat over oneindige uitkomstenruimten en behandelt de normale kansverdeling. Het vierde hoofdstuk behandelt beschrijvende statistiek, het laatste hoofdstuk het toetsen van een hypothese en betrouwbaarheidsintervallen.

Met deze teksten wordt sinds de cursus 1961—'62 geëxperimenteerd. Het is nog te vroeg om conclusies te trekken uit de rapporten van de leraren die erbij betrokken zijn. Vrijwel al deze leraren (alleen al in Zweden in 1962—'63 meer dan 200, op vrijwillige basis) willen ermee doorgaan; een meerderheid onder hen is bijzonder ingenomen met het vervangen van verouderde leerstof door moderne onderwerpen als vectoren en statistiek, en bij hun leerlingen blijkt een meer dan gewone belangstelling voor de wiskundelessen te bestaan.

Het is tekenend voor de stand van de modernisering in de Scandinavische landen, dat aldaar niet alleen deze experimentele cursussen in gebruik zijn, maar ook reeds normaal uitgegeven schoolboeken die met het beschreven programma in overeenstemming zijn. Zo b.v. in Denemarken: E. Kristensen en O. Rindung, *Matematik*, bestemd voor het gymnasium (van dit boek zijn de eerste twee delen verschenen) en in Zweden: L. Råde, *Sannolikhetslåra och statistik.*

5. Een belangrijke bijdrage tot de discussies werd door de Belgen geleverd, met name door Servais en Papy.

Servais deed mededelingen over een programma waarmee in Belgische scholen met succes wordt geëxperimenteerd. Aangezien dit programma een basis voor de discussies werd, volgt hier een beknopte beschrijving van inhoud en doelstellingen.

Het wiskundeonderwijs dient zowel de structuren te ontwikkelen als tot toepassingen te leiden. Een fundamenteel principe is het volgende: „Het is nuttig en nodig het onderwijs zo in te richten, dat men de wiskundige structuren actief benut, en wel niet slechts als doel, maar ook als didactisch middel". (Het laatste gedeelte van deze uitspraak werd ter conferentie niet door iedereen aanvaard). Volgens Servais wijst de ervaring uit, dat op deze manier gegeven onderwijs tijd bespaart en tot betere resultaten leidt dan het op traditionele manier gegeven onderwijs. Het leerplan dient zich te concentreren op de thema's vectorruimten, analyse en statistiek. Als het onderwijs wil beantwoorden aan de verlangens van degenen die de wiskunde toepassen, moet het zich om deze kernen kristalliseren. Bovendien verschaffen de genoemde onderwerpen voldoende middelen om de leerlingen een afgerond geheel van wiskundige vorming bij te brengen.

Een dergelijke beknopte vermelding van de hoofdpunten van een programma voor onderwijs in wiskunde zegt natuurlijk niet veel; men kan op deze basis nog een grote verscheidenheid van programma's samenstellen. Het zou echter te veel plaats nemen

als de door Servais voorgestelde uitwerking van zijn basisprogramma hier werd weergegeven. Bovendien wijkt het niet essentieel af van het reeds vermelde Scandinavische programma. Het lijkt me daarom beter, en bovendien interessanter, om enkele punten uit het betoog van Prof. Papy weer te geven, in de eerste plaats omdat diens beschouwingen toch in overeenstemming zijn met de voorstellen van zijn landgenoot, in de tweede plaats omdat dan tevens iets van de toegepaste methode tot uitdrukking komt.

6. De volgende punten vormden belangrijke elementen in de uiteenzettingen van Papy.

a. Het voor het onderwijs fundamentele karakter van het begrip „verzameling". Enkele didactische gezichtspunten bij het werken hiermee. Het gebruik van venndiagrammen voor het toelichten van de begrippen „vereniging", „doorsnede" en „verschil" van twee verzamelingen. Het al of niet voldoen aan de associatieve en distributieve eigenschap. Het begrip „antidistributief" (het verschil van twee verzamelingen is antidistributief naar rechts met betrekking tot $\cup$ en tot $\cap$). Diagrammen in kleuren kunnen bij de bewijzen een belangrijke rol spelen en maken de behandeling duidelijk en aantrekkelijk. Een van de te verwachten gunstige resultaten van een behandeling van dit onderwerp: de leerlingen begrijpen het belang van de regels voor de algebra van b.v. de natuurlijke getallen beter als ze ook een algebra kennen waar de regels anders zijn.

b. Het begrip „relatie" en de hierbij behorende begrippen „reflexief", „symmetrisch", „antisymmetrisch", „transitief" en „functie" dienen zo vroeg mogelijk te worden ingevoerd. Er worden interessante en concrete voorbeelden van relaties gegeven, b.v.: leerling x $\rightarrow$ leerling wiens voornaam met dezelfde letter begint als de achternaam van x (uit te voeren als spelletje in de klas). Sommige leerlingen zullen opmerken dat dit spelletje (achternaam $\rightarrow$ voornaam) „moeilijker" is dan het spelletje voornaam $\rightarrow$ voornaam, hetgeen gelegenheid geeft om op het begrip „symmetrisch" in te gaan. Een naam als „Brigitte Bardot" leidt, bij het eerste spelletje tot het begrip „reflexief". Alles wordt overvloedig toegelicht met diagrammen en pijlen, in kleuren uitgevoerd, en volgens Papy zijn reeds leerlingen van negen en tien jaar in staat om op dit gebied redeneringen te houden, die men als abstract pleegt te beschouwen. „Equivalentie" en „orderelaties" worden besproken, afbeeldingen „op" en „in", het samenstellen van relaties en afbeeldingen (voorbeeld van een niet-commutatieve samenstelling: grootmoeder van vaders zijde $\neq$ grootvader van moeders zijde), toepassingen op de

punten van het platte vlak, „permutatie", „transformatie".

c. In de meetkunde kan het begrip „orde" vanaf het begin worden behandeld; hiertoe worden de begrippen „evenwijdig" en „georiënteerde lijn" ingevoerd. Nu kan een definitie van „parallellogram" worden gegeven en met behulp van een paar passend gekozen axioma's (ontleend aan de aanschouwing, zoals alle axioma's) wordt de stelling van Pasch bewezen: als A, B en C punten zijn en l een lijn is, dan geldt

$$\left.\begin{array}{r} A,\ B,\ C \notin l \\ \text{en} \\ l \text{ snijdt }]BC[\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} l \text{ snijdt }]CA[\\ \quad\text{of} \\ l \text{ snijdt }]AB[. \end{array}\right.$$

d. Oneindige verzamelingen. E is oneindig als er bestaat

$$a \in E,\ b \in E - \{a\},\ c \in E - \{a, b\},\ \text{enz.}$$

De rij punten $a, b, c, \ldots$, met pijlen van a naar b, van b naar c, enz. wordt benut als voorstelling van een „ribambelle". Een verzameling is dus oneindig als er een „ribambelle" in kan worden gedefinieerd. Het bewijs van de stelling: een verzameling is dan en slechts dan oneindig als hij gelijkmachtig is met een echte deelverzameling, is dan gemakkelijk te begrijpen. Volgens Papy zullen leerlingen van 15 jaar geen moeite hebben met een bewijs van de stelling van Bernstein (A en B stellen verzamelingen voor en $\# A$ het cardinaalgetal van A):

$$\# A \leqq \# B \text{ en } \# B \leqq \# A \Rightarrow \# A = \# B.$$

Wegens de reflexiviteit en transitiviteit van de relatie $\leqq$ is deze dan dus een orderelatie.

e. De negatieve getallen worden op een bijzonder aanschouwelijke manier ingevoerd door uit te gaan van het tweetallig stelsel. Op dezelfde basis worden de reële getallen ingevoerd en wordt verder verband gelegd met de stelling, dat evenwijdige lijnen evenredige stukken afsnijden van lijnen die deze snijden (waarbij het onderscheid tussen het „meetbare" en het „onmeetbare" geval niet meer essentieel is).

f. Het begrip „groep" wordt zorgvuldig voorbereid en met de volgende voorbeelden toegelicht:

$Z, +$	de gehele getallen, operatie: optellen;
$T, \circ$	de translaties, operatie: de translaties na elkaar uituitvoeren;
$V, +$	de vrije vectoren, operatie: optelling;
$\pi_0, +$	de vectoren vanuit één oorsprong, operatie: optelling;

SV, 0	de symmetrische groep van de verzameling V, operatie: de permutaties na elkaar uitvoeren;
PE, $\triangle$	de deelverzamelingen van een gegeven verzameling E, operatie $\triangle$ gedefinieerd door: $A \triangle B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$, waarin X' het complement van X is.

Het bovenstaande is slechts een droge opsomming van een gedeelte uit de rijke inhoud van Papy's uiteenzettingen. Ik raad elke leraar aan zijn boek *Mathématique Moderne,* waarvan het eerste deel verschenen is en binnenkort ook in het Nederlands te verkrijgen zal zijn, te lezen en, met het oog op een modernisering van eigen onderwijs, aandachtig te bestuderen. Het is op een uiterst levendige manier geschreven, maakt de stof op allerlei manieren

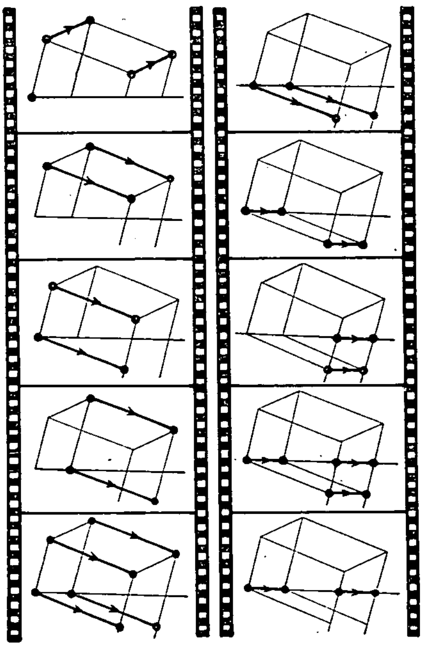


Fig. 1.

aantrekkelijk en helder, en lijkt daarom bij uitstek geschikt om pogingen tot modernisering van het wiskundeonderwijs in de lagere klassen te doen slagen. Om althans enigszins een indruk te geven van de toegepaste onderwijsmethode, geef ik een fragment weer (fig. 1, pag. 8a). Het is een bewijs, in de trant van een filmstrip, van de stelling dat „equipollente paren" door evenwijdige projectie op een lijn weer equipollente paren opleveren. (Een equipollent

paar is een tweetal lijnstukken die overstaande zijden van een parallellogram zijn, of die door parallellogrammen kunnen worden verbonden, zoals de lijnstukken *a* en *b* in fig. 2).

Het bovenstaande voorbeeld heb ik mede gekozen om de aandacht van de lezer te vestigen op de logische opzet van Papy's inleiding in de meetkunde. Het is interessant te zien hoe hij, uitgaande van een klein aantal verstrekkende axioma's, waarvan één de transitiviteit van het begrip „equipollentie" vastlegt, het toepassen van congruentie, althans voorlopig, weet te vermijden.

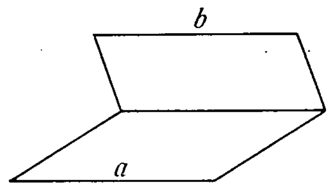


Fig. 2.

7. Om een modern programma te kunnen onderwijzen dient een leraar een adequate opleiding te hebben gehad. Hij moet de stof die hij onderwijst of zal gaan onderwijzen wetenschappelijk en didactisch volledig beheersen. Om onderricht te kunnen geven in de beginselen van een theorie moet hij een oordeel hebben over hetgeen op die beginselen volgt. Aan de andere kant dwingt de huidige situatie ons om leraren in grote aantallen, en bovendien snel, op te leiden. Tussen deze en de voorafgaande eis, die beide even dwingend zijn, dient een middenweg te worden gevonden. Zulk een weg te wijzen was de bedoeling van de beschouwingen van Prof. Revuz, waarin hij aangaf over welke kennis van de wiskunde een leraar in dat vak dient te beschikken. In zijn betoog verwees hij enige keren naar het programma dat in het „paspoort" van de wiskundestudenten aan Europese universiteiten (Livret européen de l'étudiant) staat vermeld.

Uitgegaan wordt van een indeling van het onderwijs, voor zover het de wiskunde betreft, in de volgende vier stadia:

onderbouw v.h.m.o.,

bovenbouw v.h.m.o.,

niveau I (overeenkomend met het eerste niveau van het „paspoort", drie à vier semesters),

niveau II (tweede niveau „paspoort", zuivere of toegepaste wiskunde, tezamen met eerste niveau: vier jaar).

Als eerste benadering voor de kennis en bekwaamheid die een

leraar dient te bezitten, worden nu de volgende eisen gesteld:

wetenschappelijke en didactische beheersing van het stadium waarin wordt onderwezen,

wetenschappelijke beheersing van het onmiddellijk daarop volgende stadium,

in voldoende mate vertrouwd zijn met het volgende stadium.

De didactische vorming van de a.s. leraar moet in de eerste plaats een verdieping inhouden van die universitaire leerstof die onmiddellijk verband houdt met wat in de middelbare school zal worden onderwezen. De leraar moet deze stof zo beheersen dat hij die anderen kan uitleggen.

Als basis van de volgende beschouwingen wordt het programma van Dubrovnik genomen, dat uiteengezet is in „*Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire*" uitgegeven door de O.E.S.O.

Leraren in de onderbouw. Niveau I is grotendeels voldoende voor analyse en numerieke analyse, maar dient als volgt te worden aangevuld:

a. Voor algebra, waarvoor niveau I niet voldoende boven het programma van Dubrovnik staat. Voor dit onderdeel moet de a.s. leraar niveau II (in het „paspoort" de onderwerpen, aangegeven met no. 11, „Algèbre des ensembles et algèbre, niveau 2" en nr. 19, „Bloc élémentaire") hebben bereikt. Bovendien moeten de hierin genoemde onderwerpen van hun didactische kant bestudeerd zijn.

b. Voor meetkunde. Het programma van Dubrovnik stelt voor dit onderdeel weliswaar slechts bescheiden eisen, maar men kan licht in fouten vervallen bij het beginnend meetkunde-onderwijs. Het programma van niveau I voor analytische meetkunde („paspoort", no. 2) dient daarom eveneens te worden aangevuld met het „Bloc élémentaire".

c. Voor de kansrekening en de statistiek voorziet niveau I („paspoort", no. 10) niet in de behoeften van het onderwijs (1e cyclus Dubrovnik). Deze lacune moet worden aangevuld (in het bijzonder met stochastische convergentie).

Leraren in de bovenbouw. Niveau II voorziet vrijwel in voldoende mate in de behoeften van de leraar. Het vormt tevens een voldoende basis om hem in staat te stellen zijn wiskundige kennis, voor zover hij die in verband met toekomstige vernieuwingen van het onderwijs nodig zal hebben, te blijven aanvullen. Er zou echter wat bij moeten op het terrein van de:

d. meetkunde; dezelfde reden als genoemd onder *b*;

e. kansrekening en statistiek; toevoegen: maattheorie, sommen van onafhankelijke stochastische variabelen, iets over stochastische processen, beginselen van de wiskundige statistiek.

De leraar dient verder iets te weten van toepassingen van de wiskunde op andere gebieden en van de geschiedenis van de wiskunde, en hij dient enigszins geïnformeerd te zijn over de huidige stand van zaken in de wiskunde in het algemeen. De universitaire studie zal echter niet in elk van die desiderata kunnen voorzien, en ze zullen voor een groot deel voor rekening moeten komen van de voortgezette studie die, naar gehoopt wordt, de leraar als een deel van zijn opdracht zal beschouwen.

8. Prof. Fehr, als laatste spreker, legde de nadruk op de voortgezette studie van de wiskundeleraar. Slechts wanneer er een grote groep leraren wordt gevormd, die op de hoogte blijven van nieuwe ontwikkelingen op het gebied van de wiskunde, zal men in de toekomst in staat zijn zonder stagnatie nieuwe programma's in te voeren. Daarom dient de opleiding van de leraar erop gericht te zijn dat deze zijn studie blijft voortzetten als hij niet meer op de universiteit is. Hij moet daartoe dan echter ook in staat gesteld worden. Behalve het voortzetten van de thans allerwege georganiseerde cursussen voor leraren in functie, wordt daarom de jaarlijkse publikatie van één of twee boeken bepleit, die zich speciaal tot de leraar richten. Leraren zijn druk bezette mensen; ze zijn meestal geen researchwerkers, maar ze hebben wel veel liefde voor hun wetenschap en voor het onderwijs daarin. Ze hebben bij hun studie aanmoediging nodig en deze ontvangen ze alleen als ze er succes mee hebben. Daarom moeten deze boeken de nieuwe stof zo eenvoudig mogelijk en met veel voorbeelden behandelen; na ieder nieuw onderwerp moeten er vraagstukken komen, met aanwijzingen en antwoorden.

9. De conclusies waartoe deze conferentie ten slotte kwam, werden neergelegd in een aantal resoluties en aanbevelingen. Omdat ze zo zijn opgesteld, dat ze met algemene stemmen konden worden aanvaard, kunnen ze niet als een uittreksel van hetgeen ter conferentie werd besproken worden opgevat. Aangevuld met hetgeen in het voorafgaande deel van dit verslag werd vermeld, geven ze echter een vrij volledig beeld van de onderwerpen die bij de discussies ter sprake kwamen.

De formulering van de meeste resoluties en aanbevelingen luisterde nogal nauw. Om die reden geef ik ze alle weer in de taal, waarin ze werden opgesteld.

Resolutions and recommendations

I. *An information service.*

The O.E.C.D. should provide to Member Countries and information service on developments taking place in mathematical education in Member Countries.

II. *Exchange visits.*

The Conference considers exchanges of people involved in the improvement of mathematical education to be of vital importance, and economical in the long run.

We recommend that O.E.C.D. and responsible bodies in Member Countries take the initiative in sponsoring such visits.

III. *The need for research.*

The Conference recommends that research on an extended scale should be conducted into the potentialities of films, television and programmed instruction in relation to the teaching of mathematics.

IV. *Pilot classes.*

The Conference emphasizes the importance of experimental classes in mathematics in order to facilitate the introduction of new methods and new content.

In view of the rapidity of change, it recommends that the practice of such classes should be established on a continuing basis.

V. *Training of teachers.*

It is evident that the education of a prospective teacher of mathematics should have a pedagogical as well as a mathematical content.

The mathematical content should carry his knowledge of the subject well beyond the level of the teaching he will be requested to give. This implies a mastery of the fundamentals of modern mathematics together with knowledge of a variety of applications of modern mathematics.

The pedagogical content should be closely related to the mathematics he will teach, and should include psychological understanding of the children he will teach.

In both respects, he should be so prepared that he will be able to continue his own education and be able to adjust to the changing conditions he is certain to encounter in his working life.

The foregoing consideration should also apply to any emergency measures which may be taken to meet a shortage of teachers.

Moreover, if there is more than one level of preparation for secondary teachers, it is advisable that the training for a lower level should be such as to enable the prospective teacher subsequently to transfer conveniently from a lower level to a higher level.

VI. *In-service training.*

The improvement and modernisation of mathematical education is impossible without a major effort to establish or to extend the facilities for the in-service training of teachers.

There are a variety of ways by which this can be done, including the development of correspondence courses, but the Conference draws particular attention to the necessity of teachers returning periodically to a University, or center of higher education of similar standards.

It is also of the utmost importance that teachers should be freed from teaching duties and financially assisted as may be necessary, to enable them to take full advantage of whatever opportunities are available. With appropriate financial support, important contribution to in-service training can be made not only by colleges and universities, but also by professional associations and centers.

VII. *On course content.*

In view of the cultural and practical importance of the subject, and of the ever increasing uses to which mathematics is put, every student be adequately prepared in mathematics during his secondary studies. In this context, Sets, Relations and Functions are basic to the study of all mathematics.

It is necessary to recognise the importance for science specialists of the following topics: vector spaces, the calculus, and probability and statistics.

Also other than science students should receive a sound mathematical education. Their courses should be genuinely mathematical, and should include the fundamental concepts, together with a knowledge of their applications. Particularly, these courses should include probability and statistics.

VIII. *Syllabus content; computing.*

The Conference recognises that the use of computers will become

more and more an intrinsic element of civilisation. This fact should be duly reflected in mathematical syllabi for the secondary schools.

IX. *Rate of development.*

The Conference urges that every O.E.C.D. country should proceed to modernize its mathematics programmes in the schools as far and as rapidly as its training resources allow.

X. *Examinations.*

Examinations should evolve in response to the goals of a modern mathematical education. There is a great danger that examinations with a fixed syllabus and a standard type of examination paper will stand in the way of the improvement of school courses.

XI. *Teaching through situations.*

The applied mathematician proceeds by building mathematical models of situations in the real world. He draws deduction from the models and builds an appropriate mathematical structure, which he subsequently tests against the original situation. The evolution of pure mathematics proceeds on similar lines.

We recommend that the teaching of mathematics should adopt the same pattern: the student should be confronted with situations to think about; he should build up his intuition about them and then proceed to mathematize them.

XII. *The value of teaching through applications.*

It is important that students should be brought to recognise that mathematics is useful in society. One of the easy ways to develop this attitude is to use, from time to time, applications from a wide variety of fields as motivation for the teaching of mathematical concepts, and to practise mathematics also in the context of such applications. This means, among other things, that the teacher of mathematics should co-operate closely with the teachers of other subjects which use mathematics.

XIII. *Nature of mathematics.*

Mathematics is a unified discipline; it is not a series of isolated tricks.

In the teaching of mathematics it is necessary to use structure as a fundamental working tool.

XIV. *Liaison with scientists.*

The teaching of mathematics has close relations with the teaching of other sciences. Many advantages can be gained from mutual discussion of curricula and pedagogical problems. Accordingly, the Conference recommends to O.E.C.D. that at future meetings concerning the teaching of other sciences or of mathematics, representatives of the other discipline should be present.

XV. *Definitions and notation.*

Any mathematical terms and symbols, employed in printed reports of the O.E.C.D., which are not commonly used in traditional school mathematics, should be fully explained in the text and illustrated with examples as deemed necessary.

10. In verreweg de meeste landen blijkt de vernieuwing van het wiskundeonderwijs te zijn begonnen. In sommige is er een schoorvoetend begin met experimenteel onderwijs, in andere hebben de nieuwe programma's reeds als schoolboek hun vorm gekregen. De conferentie heeft voor alle landen van de O.E.S.O. de mogelijkheid geopend, van elkaar te leren. Naar verwachting zal hij een stimulerend effect hebben op het experimenteren met moderne leerstof, een aanmoediging zijn om op de ingeslagen weg voort te gaan, of een prikkel om de eerste stap te doen.

L. N. H. Bunt

PROGRAMMEREN [1])

door

Dr. M. Euwe

Amsterdam

De bedoeling van deze korte inleiding is een indruk te geven van wat programmeren is. Voorts of er verband bestaat tussen programmeren en wiskunde, en tenslotte waarom het programmeren zo moeilijk wordt geacht.

Zonder op de technische details van de elektronische machine in te gaan is het goed heel beknopt te stellen, dat we drie fasen onderscheiden: invoer, verwerking en uitvoer.

— De gegevens van het probleem worden ingevoerd via het een of ander medium: ponskaart, ponsband of magnetische band.

[1]) Voordracht voor de Jaarvergadering van Wimecos, 27 dec. 1963 te Utrecht.

— Deze gegevens worden onder de besturing van het in het geheugen opgeborgen programma verwerkt.
— De resultaten van deze verwerking worden uitgevoerd in gedrukte of getypte of in andere vorm.

Onder een programma verstaan we een verzameling van machine-instructies, die achtereenvolgens uitgevoerd, de oplossing van het probleem bewerkstelligen. Om deze gang van zaken een concrete achtergrond te geven, zullen we een voorbeeld ter hand nemen: de oplossing van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$.

Het gebruik van de machine wordt voor een eenvoudig vraagstuk als dit, pas rendabel, wanneer het gaat om de uitwerking van grote aantallen.

We hebben, bijvoorbeeld 1000 vierkantsvergelijkingen op te lossen. De coëfficiënten a, b en c van deze vergelijkingen worden op ponskaarten gebracht, één stel coëfficiënten per kaart.

Alvorens het procédé kan beginnen, moet eerst het programma worden ontworpen. Dat betekent, dat we stap voor stap de instructies moeten opschrijven met behulp waarvan uit de gegeven a, b en c de gevraagde x_1 en x_2 worden berekend. Dit is geen moeilijk werk, maar we moeten wel precies weten wat we willen. De formule luidt

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$ We beginnen dus:

1) Lees in a, b, c. Dit wil zeggen: De coëfficiënten van de eerste (en van elke volgende) vergelijking worden op genummerde adressen in het geheugen opgeborgen; bijvoorbeeld a komt op adres 101, b op 102, c op 103. We schrijven $(101) = a$; dit betekent, „de inhoud van adres $101 = a$". Verder geldt $(102) = b$; $(103) = c$.
2) Bereken $p = a \times c$. Deze instructie, moet, evenals de nu volgende, worden omgezet in machinecode. Over deze bezigheid, het coderen, zullen we het hier niet hebben, maar het is wel nuttig een globale indruk te krijgen, hoe zo'n instructie in elkaar zit. De algebra werkt met letters, het programmeren werkt met adressen.

Wanneer de vermenigvuldigingsinstructie wordt voorgesteld door MU, de transportinstructie van geheugen naar rekenorgaan door TR en het retourtransport van rekenorgaan naar geheugen door RT, dan kan de gevraagde vermenigvuldiging worden volvoerd door de volgende instructies:

TR 101 (Breng a naar het rekenorgaan)
MU 103 (vermenigvuldig c met de inhoud van het rekenorgaan)
RT 104 (Breng het produkt ac naar adres 104).

We zullen ons in het vervolg beperken tot de verbale weergave der instructies.

3) Bereken $q = 4 \times p$
4) Bereken $k = b \times b$
5) Bereken $D = k - q$

We moeten nu vaststellen, wat er moet gebeuren, wanneer D negatief uitvalt. Willen we in dat geval volstaan met de mededeling „wortels onbestaanbaar" of moet dan het reële en imaginaire gedeelte van de complexe wortels worden uitgerekend?

Zetten we de programmering voort, daarbij uitgaande van het laatstgenoemde alternatief (berekening reële en complexe gedeelte).

6) Bereken $s = 2 \times a$
7) Bereken $r = -b/s$
8) Indien $D < 0$ ga naar instructie 15. Anders ga voort met instructie 9.
9) Bereken $W = \sqrt{D}$
10) Bereken $t = W/s$
11) Bereken $x(1) = r + s$
12) Bereken $x(2) = r - s$
13) Druk af $a, b, c, x(1), x(2)$
14) Ga terug naar 1
15) Bereken $W = \sqrt{-D}$
16) Bereken $i = W/s$
17) Druk af a, b, c, r, i
18) Ga terug naar 1

Er is geen bijzondere mathematische aanleg of kennis nodig om dit programma te ontwerpen. Toch zijn er nog kleine complicaties, die het programma in de gegeven vorm onbruikbaar zouden maken. Wat moet er bijvoorbeeld gebeuren, wanneer $a = 0$, of wanneer $| a |$ zeer klein is? Of wanneer $| c |$ klein? Dit moet alles in details geregeld worden.

Wanneer het programma aldus gecompleteerd is, wordt het met een aantal proefgevallen getest en vervolgens wordt het op ponskaarten of in een ander medium vastgelegd.

Dit programma moet het eerst de machine in, d.w.z. het programma wordt opgeborgen in het centrale gedeelte van de machine,

het geheugen. Elke instructie op één adres. De adressen van het geheugen bevatten dus zowel grondgegevens (a, b, c), tussenresultaten (p, q, k, D) en eindresultaten $(x(1), x(2))$, als ook instructies.

Zodra de coëfficiënten van de eerste vergelijking zijn ingelezen (instructie 1) worden de instructies 2 en volgende op de a, b en c toegepast. Deze serie instructies eindigt met een afdrukinstructie, hetgeen wil zeggen, dat de resultaten mèt de grondgegevens worden afgedrukt, hetzij in getypte, hetzij in drukvorm. Daarna is de tweede vergelijking aan de beurt en zo vervolgens.

De rekenmachine voert deze berekeningen met zeer grote snelheid uit. Afhankelijk van de grootte en het „jaar'' van de machine zal de taak om deze 1000 vergelijkingen op te lossen en uit te schrijven, worden volbracht in een tijd, die ligt tussen 2 minuten en 6 minuten.

De vierkantsvergelijking is een eenvoudig voorbeeld van een z.g. wetenschappelijk probleem. Ook voor de meer ingewikkelde vraagstukken, zoals het oplossen van 40 lineaire vergelijkingen met 40 onbekenden of voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen is de elektronische machine uitermate geschikt. De programmering van deze vraagstukken is niet moeilijk en ook niet omvangrijk, omdat deze veelal neerkomt op de voortdurende herhaling van een bepaald procédé (iteratie). De moeilijkheden komen pas bij het zetten van de puntjes op de i.

Tegenover de wetenschappelijke problemen staan de administratieve problemen, waarbij de rekenkundige bewerkingen doorgaans gering in aantal zijn en het zwaartepunt ligt op de organisatie. Vergelijk de postgiro, waarbij het rekenkundig gedeelte neerkomt op een aantal optellingen en aftrekkingen. De organisatie van de invoer van een miljoen overschrijvingen is evenwel een groot probleem.

Toch kunnen bij het programmeren van administratieve problemen ook wel kleine kneepjes voorkomen.

Daarvan een voorbeeld. Van een grote groep werknemers wordt wekelijks 1 % van het brutoloon B ingehouden als premie voor ongevallen. De bepaling is, dat elke werknemer per jaar niet meer dan in totaal ƒ 100,— betaalt.

Wil men derhalve de inhouding I voor een bepaalde week berekenen, dan moet gegeven zijn, hoeveel in totaal sinds 1 januari van het lopende jaar werd ingehouden: T.

Het „ruwe'' programma luidt nu als volgt:

Indien $T \geqq 10000$ dan $I = 0$

Anders indien $T + 0{,}01\,B > 10000$, dan $I = 10000 - T$

Anders $I = 0{,}01\ B$.

De ervaring leert, dat beginnelingen gewoonlijk twee fouten maken:

1) zij slaan de 2e instructie over
2) zij schrijven 100 inplaats van 10000 (in centen).

Een belangrijk hulpmiddel tenslotte om het programmeren te vergemakkelijken en de programmeertijd te bekorten, bestaat in het gebruik van programmeertalen.

Het principe is dat het programma in een bepaalde gestandaardiseerde vorm wordt opgeschreven en dat de machine (zelf) daarvan dan het machine-code-programma maakt. Dit laatste kan daarna worden gebruikt om het eigenlijke probleem uit te werken.

Een voorbeeld, dat betrekking heeft op de nieuwe regeling voor het belastbaar inkomen van de gehuwde vrouw. Het programma in COBOL (Common Business Oriented Language) luidt:

IF Inkomen $\leqq$ 50000 THEN Belastbaar = 0
ELSE IF Inkomen $\leqq$ 150000 THEN Belastbaar = Inkomen — 50000
ELSE IF Inkomen $\leqq$ 600000 THEN Belastbaar = $\frac{2}{3}$ Inkomen
ELSE Belastbaar = Inkomen — 200000.

Als men dit programma de machine invoert onder besturing van een vertaalprogramma (compiler), dan produceert de machine het codeprogramma.

Dit laatste kan dan weer worden gebruikt om het eigenlijke probleem uit te werken. In schema:

	Invoer	Programma	Uitvoer
1e gang	COBOL-progr.	compiler	machine-progr.
2e gang	gegevens	↙	uitkomsten

Komen we tenslotte nog even terug op ons punt van uitgang: verband tussen programmeren en wiskunde.

Er is geen parate wiskundige kennis nodig voor het in programma brengen hetzij van administratieve problemen hetzij van wetenschappelijke problemen met gegeven oplossing.

Wel is nodig het vermogen om een probleem — ook een zeer eenvoudig probleem — helder te analyseren en daarbij alle bijzondere gevallen in het oog te houden. De mathematicus is daartoe bij uitstek geschikt, maar ook niet-academisch gevormden, die het niet verder hebben gebracht dan eindexamen H.B.S. of zelfs MULO B, bezitten vaak het benodigde analytische vermogen.

Wanneer het gaat om het programmeren van wetenschappelijke problemen, is het uiteraard gewenst, dat men de problemen zelf mede beheerst.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. Bottema

Delft

LVII. *Wiskunde in de beeldspraak*

In de tegenwoordige en in vroegere wiskunde wordt veel *afgebeeld,* al leert men al jong dat afbeeldingen in de dagelijkse betekenis van het woord wel het denken mogen begeleiden, maar overtuigingswaarde ontberen. Voor *beeldspraak* daarentegen is in het vak geen plaats. Deze stijlfiguur mist de exactheid die in de wiskunde naar naam en wezen het gebod is en zij kan hoogstens bij een mondeling betoog soms even door de associaties die zij wekt een uitleg verhelderen. Het komt echter voor in de wiskunde dat een wel gedefinieerd begrip of proces een naam krijgt, die een *beeld* oproept van een voorwerp waaraan het op een of andere wijze herinnert, zoals de *waaier* voor de verzameling der rechten door één punt en in één vlak, de *draak* of *vlieger* (-vierhoek) en de *zeef* van Eratostenes. Bij een *nest* van intervallen hebben wij, neem ik aan, met een herhaald beeld te doen dat via het keukengerei op de oorspronkelijke betekenis terug gaat. Wij kunnen begrijpen dat men in de vlakke kinematica aan een verzameling baanrechten, waarlangs zich punten bewegen, de naam *emplacement* wil geven. Bij *kettingbreuken* en *tweeling*-priemgetallen is de afstand tussen beeld en origineel voor mijn gevoel al groter en bij de *lichamen* en de *ringen* der algebra zeggen de woorden weinig of niets meer. Een *net* van krommen op een oppervlak (met al of niet infinitesimale *mazen*) heeft een meer beeldende naam, dan de lineaire collectie van ∞^2 vlakke krommen, die eveneens zo heet. Fraai is *schoof* voor alle rechten door een punt in de ruimte, maar *bundel* en *schaar* zeggen weinig meer dan nogal wat en het *kluwen* en het *legioen,* door Barrau zonder bijval voorgesteld, zijn alleen maar mooie namen voor heel veel van eenzelfde soort.

Laat ons overigens niet vergeten dat het gehele doopregister van de namen in de mathesis een overblijfsel is van de nationale gedachte in een interstellaire wetenschap. Wij leven in een onvolmaakte tijd, die nog het monnikenwerk verricht van wiskundeboeken vertalen, maar gelukkig: soldaat 370702026, het algol, het proza van de *Principia mathematica,* de dienstdoende agent 64 en het verslag van een schaakpartij zijn de lenteboden van een betere toekomst.

Geen beeldspraak dus in de wiskunde. Maar hoe staat het met de

wiskunde in de beeldspraak? Wij denken daarbij niet aan de metafoor des dichters, die gewaardeerd wordt wegens haar oorspronkelijkheid en het element van verrassing, maar aan het tegengestelde: de gecodificeerde beeldspraak, die men aanduidt met staande uitdrukking, aan de taalclichés die onze dialogen versieren en een instrument zijn der journalisten. In het voortreffelijke tijdschriftje Onze Taal werd onlangs de opvatting verdedigd, dat deze middelen alle stammen uit een vroegere tijd. Inderdaad moet men toegeven dat het bakken van zoete broodjes, het verliezen van draden en het kwijtraken van klutsen herinneren aan ambachten en bezigheden met een lang verleden. Maar de stelling bleek onhoudbaar want een volgend nummer gaf voorbeelden van onmiskenbaar in onze jaren ontstane zegswijzen. Tussen twee instanties kan met voorbijgaan aan de formele verbindingen een (wel eens gunstige) *kortsluiting* ontstaan en een voorzichtige regering plaatst soms moeilijke problemen in *ijskasten*. De toenemende maatschappelijke betekenis van de wiskunde geeft daarom aan haar terminologie een kans om de Nederlandse taal te verrijken, zoals de zeilvaart en de zuivelwinning dat al eerder deden.

Drie dagen volgehouden systematische waarneming van het gesproken en het geschreven woord gaf enig voorlopig resultaat. Wij gaan er aan voorbij dat meer dan één spreker gemiddeld één maal per zin het invoegsel *dus* gebruikte zonder dat het een aanwijsbare functie vervulde; enig verband met de voorname betekenis van dit woord in de mathesis leek niet aanwezig. Zowel op een feestavond als in de carrière van een beroemd persoon werd een *hoogtepunt* aangewezen, maar het correspondeerde niet met de meetkundige merkwaardigheid. Punten komen overigens in het algemeen veel voor; soms *sec* („dit is 't punt"), maar ook als *keerpunt* en *brandpunt*; het *zwaartepunt* wordt zoals men weet bij voorkeur gelegd. Twistpunten en knelpunten zijn bij ons onbekend. Misleidend zijn de elkaar *kruisende* levenspaden, die het tegengestelde uitdrukken van de kruisende lijnen der voormalige stereometrie. (Onze meetkundige terminologie is hier echter weinig gelukkig en zij staat achter bij *skew* en *windschief*; een mooi woord ware scheluw, scheel, schel, wat men zegt of zei van ladders die uit vorm zijn).

Onnodig te zeggen dat in drie etmalen veel gedifferentieerd en nog meer *geïntegreerd* wordt. Een onzer literaire essayisten, overeenkomst aanwijzend tussen Dostojewski en Nietzsche merkt op: wij zouden hier liever van *raakpunten* dan van *parallellen* spreken; de wiskundige zal de alternatieven wat ongelijkwaardig vinden, maar hij is dankbaar een voortreffelijk stylist met meetkundige termen te kunnen bijstaan.

Twee uitdrukkingen, respectievelijk aan de reken- en de meetkunde ontleend, komen tegenwoordig zo veelvuldig voor dat de enquêteur de *tel* kwijtraakte: *onder* (of op) *één noemer brengen* en *in één vlak liggen.*

Er is een verouderde Duitse zegswijze: *das geht in die Brüche,* het wordt te moeilijk, ik kan er niet meer bij, men kan het met gewone getallen niet af. Welk een vooruitgang in algemene ontwikkeling: de *breuk* is als dagelijks beeld volkomen aanvaard. Meningen, theorieën, verschijnselen, uitspraken, definities, tegenstellingen worden met graagte onder één noemer gebracht. De uitdrukking geeft enerzijds een besef van de gebrokenheid onzer samenleving, anderzijds van een behoefte aan synthese. Soms stelt een schrijver vast dat twee opvattingen onmogelijk onder een noemer zijn te brengen; hier kondigt zich reeds vaag de notie van het irrationale getal aan. Wij beperken ons tot één aanhaling. In een uitstekende, aan taalverschijnselen gewijde rubriek in een weekblad, bespreekt de auteur de woorden „waar maken" en „bewaarheden" en hij vervolgt: „hier moeten wij ermee volstaan, de term eens op z'n betekenis te onderzoeken om te zien of die betekenissen tot een gemeenschappelijke noemer herleid kunnen worden".

Naast de gebrokenheid, de gelaagdheid, de stratificatie. Wij hebben het politieke vlak, maar ook het economische en het organisatorische vlak. Deze ontwikkelingen, lees ik, liggen alle in het technische vlak. De regering overweegt maatregelen in het vlak der eierexportbeperkingen. De vraagstukken kunnen niet op deze wijze opgelost worden, want de knelpunten liggen in een heel ander vlak. Het vlak der ministeriële verantwoordelijkheid. Het vlak van het betaalde voetbal.

Elk verschijnsel in het leven blijkt zo zijn eigen vlak te hebben. Van snijdende vlakken wordt niet gerept. Maar in strijd met het beeld dat zich vagelijk in de ruimte gaat vormen is dan weer de mededeling dat in het raakvlak (van twee takken van wetenschap) een grote activiteit heerst. Van de planimetrische zegswijze geven wij slechts één citaat, waarin meetkundige, aerodynamische en biologische beeldspraak op verrassende en stoutmoedige wijze verbonden zijn. Bij het eeuwfeest van de wet van 1863 merkt een staatssecretaris van O.K. en W. op: „In Thorbecke's beeld hebben lager, middelbaar en hoger onderwijs geen gemeenschappelijk draagvlak, maar liggen zij naast elkaar met slechts uiterlijke raakvlakken en ontbreekt de diepere gezamenlijke wortel".

Wij voegen toe: dat is het punt.

KORREL CXXII
(notatie afgeleide functie)

De notatie $\frac{dx^2}{dx}$ of $\frac{d}{dx}x^2$ is een wonderlijke notatie. Er wordt een functie van x mee bedoeld, nl. de functie $2x$. Als men echter de functiewaarde van deze functie voor b.v. $x = 3$ wil vinden, moet men niet proberen voor x het getal 3 te substitueren. Men krijgt dan $\frac{d}{dx}3^2$ of misschien wel $\frac{d}{d3}3^2$. In elk geval krijgt men iets, dat niet de gewenste betekenis heeft.

Ook als men denkt aan de definitie van $\frac{d}{dx}x^2$, stuit men op zonderlinge consequenties. Per definitie is

$$\frac{d}{dx}x^2 = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$$

Als men deze definitie beziet, dan merkt men, dat in het rechter lid de vrije variabele x voorkomt. In het linker lid komt geen vrije variabele x voor. De structuur van de definitie is dus in strijd met de eisen, die de formele logica aan een definitie stelt.

Hieronder volgt een poging deze moeilijkheid nader te analyseren en een methode te vinden haar te omzeilen.

We hebben in ons voorbeeld te maken met twee successieve afbeeldingen. De eerste afbeelding beeldt x af op x^2 en de tweede x^2 op $\frac{d}{dx}x^2$. De eerste afbeelding is een afbeelding van de verzameling R van de reële getallen in R, de tweede een afbeelding van de verzameling F_1 van de differentieerbare functies van één reële variabele in de verzameling F_2 van de functies van één reële variabele.

We hebben dus twee afbeeldingen van de volgende soort:

f: $\mathrm{R} \to \mathrm{R} : x \to fx$
$\varphi : F_1 \to F_2 : f \to \varphi f.$

Dan is

$$\varphi f : \mathrm{R} \to \mathrm{R} : x \to \varphi f x.$$

Krijgt men nu $\varphi f 3$ door φ toe te passen op $f3$? Neen, want $f3$ is

een reëel getal en is dus geen element van F_1. De afbeelding φ beeldt uitsluitend elementen van F_1 af. Dus is $\varphi(f3)$ zinloos.

We krijgen dus $\varphi f3$ of, beter genoteerd, $(\varphi f)3$ niet door φ op $f3$ toe te passen. En dus is $(\varphi f)3$ niet hetzelfde als $\varphi(f3)$.

Passen we dit toe op ons geval, dan zien we dat

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2\right)_{x=3} \text{ niet hetzelfde is als } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^2.$$

Het eerste stelt voor de waarde, die de functie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2$ aanneemt voor $x = 3$; het tweede is een (hier) zinloze tekencombinatie.

In de schrijfwijze $\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}$ heeft men getracht op een handige wijze twee operaties samen te trekken, die zich op deze wijze niet samen laten trekken. Men zal dus iets beters moeten zoeken. Goed is f', waarin f de functie is, die x afbeeldt op x^2 en waarvoor dus fx betekent x^2. Per definitie is dan $f' = \varphi f$.

Hiermee zijn de moeilijkheden echter nog niet opgelost. Bij het differentiëren van samengestelde functies laat de gekozen oplossing ons in de steek. Laten we eens aannemen, dat we sin $2x$ willen differentiëren door eerst sin $2x$ naar $2x$ en daarna $2x$ naar x te differentiëren. De differentiatie van sin $2x$ naar $2x$ laat zich dan op deze manier niet beschrijven. We hebben hier te maken met het differentiëren van een functie naar een functie. Uit het geordende paar functies sin $2x$ en $2x$ wordt door deze differentiatie een nieuwe functie, nl. cos $2x$, afgeleid. We moeten nu eerst dit proces in het algemeen beschrijven. Het is een afbeelding, waarbij $F_1 \times F_1$ afgebeeld wordt in F_2. De afbeelding luidt:

$$\psi : F_1 \times F_1 \rightarrow F_2 : f \circ g \rightarrow f' \circ g,$$

waarin f' de hierboven reeds vastgestelde betekenis heeft.

Voor de duidelijkheid controleren we de zin hiervan nog aan de hand van de differentiatie van sin $2x$ naar $2x$. De functies

$$f: x \rightarrow \sin x \text{ en } g: x \rightarrow 2x$$

zijn differentieerbaar en dus beide element van F_1; verenigen we ze tot een paar, dan is dit element van het cartesisch produkt $F_1 \times F_1$. Verder is $f \circ g$ de functie, die x eerst op $2x$ en daarna $2x$ op sin $2x$ afbeeldt, dus de functie $x \rightarrow \sin 2x$. Voorts is f' de functie $x \rightarrow \cos x$ en $f' \circ g$ dus de functie $x \rightarrow \cos 2x$. Het is duidelijk, dat deze functie tot F_2 behoort en dat ze het resultaat is van de differentiatie van sin $2x$ naar $2x$.

Samenvattend zien we dus, dat geoorloofd zijn de notaties f' en $f' \circ g$. Men zou zonder bezwaar ook nog de notatie $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}$ kunnen toelaten, mits men per definitie vaststelt, dat men hieronder $f' \circ g$ verstaat.

Men heeft de notatie f' nodig om $f' \circ g$ te kunnen vormen. Achteraf ziet men, dat f' een bijzonder geval van $f' \circ g$ is. Als men voor g kiest de identieke afbeelding I: $x \to x$, dan ziet men, dat $f' = f' \circ \mathrm{I}$. $\left(\text{en dus } f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}I}\right)$.

Niet geoorloofd zijn notaties als

$$\frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}gx}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d} \sin 2x}{\mathrm{d}x}.$$

Ongeoorloofd zijn dus al die notaties, waarin de beide functies $x \to fx$ en $f \to f'$ door elkaar gehaspeld zijn.

Met dit alles is het probleem echter wel geanalyseerd, maar nog niet opgelost. De voorgestelde notatie is m.i. wel toelaatbaar in die zin, dat ze de bezwaren van de traditionele mist, maar ze is helaas praktisch onbruikbaar door haar omslachtigheid. Blijft dus de opgave te zoeken naar een toelaatbare en tevens praktisch bruikbare notatie.

P. G. J. Vredenduin

BOEKBESPREKING

G. Mostow, J. Sampson en J. P. Meijer, *Fundamental Structures of Algebra*, Mc. Graw-Hill Book company, inc., London 1963, 585 blz. Prijs 69/6.

Indien men zich oriënteren wil in de ontwikkeling, die de wiskunde de laatste 30 jaar heeft doorgemaakt, dan kan men niet klagen dàt er geen geschikte handboeken zijn, die hierin de helpende hand bieden.

Men kan principieel twee verschillende methoden onderscheiden in de vorm waarin „de nieuwe wiskunde" wordt opgediend. De eerste methode brengt „in barre abstractheid" een ontwikkeling, die niet afdaalt naar het peil van de niet-ingewijde. Deze moet zelf trachten een concept te construeren, dat hem in staat stelt iets te doorgronden van de portee van de definities en de afgeleide resultaten. De tweede methode daarentegen neemt de lezer mee en voert hem, leiding gevend met duidelijke verklaringen van het „waarom zo?" mee naar abstracte structuren, waarbij de band met het verleden niet geheel verbroken is.

Bovengenoemd boek zou ik tot deze laatste categorie willen rekenen. Veel zorg is eraan besteed, de moderne wiskundige taal duidelijk te maken, de achtergrond van de abstracties aan te duiden, de structuren die optreden uit de meest elementaire op te bouwen.

Uitgaande van een verzameling waarin een binaire operatie gedefinieerd is, wordt eerst nauwkeurig de zin nagegaan van de associatieve wet en de consequenties indien

een verzameling een neutraal element t.o.v. deze operatie bevat. Daarna komt de commutatieve wet aan de orde en wordt de eenvoudigste structuur, de groep, ingevoerd. Zonder hierin direct diep door te dringen worden de begrippen: homomorfie, endomorfie, epimorfie, isomorfie, automorfie en monomorfie duidelijk vastgesteld.

Daarna volgt een behandeling van ringen, integriteitsgebieden en lichamen (de bladzijden 21 t/m 27 worden in hoofdstuk 2 letterlijk herhaald op blz. 29 t/m 32 en 81 t/m 83. De bedoeling hiervan is om eventueel na blz. 27 direct over te gaan naar de lineaire algebra).

De schrijvers achten het m.i. terecht een te lange weg om van de axioma's van Peano uit te gaan en zo moeizaam van de natuurlijke getallen over te gaan op uitgebreider getalsystemen. Speciale aandacht is besteed aan de behandeling van het inductieprincipe, enkele getaltheoretische wetten (priemgetallen, G.G.D., congruenties) en cauchy-rijen in het lichaam van de rationale, reële en complexe getallen.

Uitvoerig is de behandeling van polynomen (van een en meer variabelen), de definitie van een variabele over een ring, ontbinding in factoren, het bepalen van de G.G.D., het oplossen van vergelijkingen van de 3e en 4e graad. Daarna komen de rationale functies aan bod gedefinieerd m.b.v. een quotiëntenlichaam van een polinoomring $(x_1, \ldots, x_n)$ over een lichaam k.

Met de behandeling van deze basisbegrippen zijn 7 hoofdstukken, 170 blz. gemoeid. De weg is dan vrij om de verdere uitbouw te volgen: vectorruimten, affiene en euclidische ruimten, analytische meetkunde (in 2 dimensies) lineaire, transformaties met als gevolg determinanten- en matrix-rekening (eigenvectoren en eigenwaarden). In hoofdstuk 10 wordt de groepentheorie opnieuw aangesneden i.v.m. de leer van de permutaties (Lagrange, Cayley, Sylow, Jordan, Hölder) De resterende hoofdstukken behandelen differentiaalvergelijkingen, omzetting van matrices in de jordan-normaalvorm, het gram-schmidt-orthonormalisatieproces; quotiënten, structuren en tensoren.

Een prachtig boek voor zelfstudie. Burgers

R. L. Eisenman, *Matrix Vector Analysis*, McGraw-Hill Book Company Inc. New York, 1963, 314 blz., prijs 46/—.

De auteur is verbonden aan U.S. Air Force Academy in Colorado. Het boek is geheel in een vertrouwelijke doceer-stijl geschreven, telkens vindt men aanmoedigingen in de tekst. Zoals b.v. „the student who carefully distinguishes between a vector and a scalar and never confuses the two earns a A in a vector course". of: I.v.m. een verzameling van lineair onafhankelijke vectoren:

„Most students have difficulty at their first encounter with linear dependence. Those few who think it easy are either very brillant or so dense as to miss the point".

Men vindt geen verdeling in hoofdstukken als: vectoren, matrices, groepen, lineaire transformaties, vectoranalyse of vectorruimten, doch al deze onderwerpen komen automatisch ter sprake, voorzover ze dienst doen in de behandelde onderwerpen, d.w.z. als praktische toepassingen.

Men start met de beginselen van de vectorrekening, in volgorde: „cross"-produkt, vectorprojectie, „dot"-produkt, „box"-produkt en hiervan gemengde operaties. De betekenis van een basis (orthogonaal, orthonormaal, rechthoekig). De overgang van de ene basis naar een andere geeft aanleiding deze overgang via matrix-vermenigvuldiging uit te voeren, waarmee de matrices direct praktisch en efficiënt blijken te zijn. Geen theorie over het berekenen van inversen van matrices, maar

aangezien ze voor de „terugrekening" nodig zijn, slechts de stelling dat de inverse van een orthogonale matrix de zgn. getransformeerde matrix is. Dat niet elke matrix een inverse heeft wordt in een opgave duidelijk gemaakt.

Scalaire punt- en vectorfuncties, afgeleiden ruimtekrommen (booglengte, kromming, normaal), relatieve afgeleiden als gevolg van de overgang naar een basis die t.o.v. de eerste in beweging is, gradiënt, divergentie en rotatie, al deze onderwerpen komen a.h.w. uit elkaar voort. Meermalen wordt de lezer uitgenodigd tot „educated guesswork, which is the lifeblood of mathematics in setting up and molding results from models".

Men vindt veel, wat didactisch bijzonder waardevol is.

Vele opgaven, meestal praktisch georiënteerd, met antwoorden maken dit een geslaagd studieboek. Men vindt er verschillende onderwerpen, die geschikt lijken voor een behandeling in de hoogste klas van ons V.H.M.O. Ik noem slechts: het coderen m.b.v. matrices, markow-ketens, de feitelijke zin van de gausz-, resp. gausz-jordan reductie van een matrix, herleiding van kwadratische vormen m.b.v. matrices, kortom een boek, dat ik gaarne belangstellenden wil aanbevelen.

Burgers

L. Auslander, and R. E. Mackenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*; MacGraw-Hill Book Company, New York/London, 1963, 219 pages, 77 sh.

In dit boek wordt de lezer vertrouwd gemaakt met topologische ruimten, waar een differentieerbare structuur aan wordt toegekend. De eerste zes hoofdstukken zijn aan de invoering van differentieerbare veelvuldigheden gewijd, waarvan, na het geven van de definitie, een aantal voorbeelden besproken wordt (bijv. projectieve algebraïsche variëteiten). Dit deel van het boek loopt uit op het inbeddingstheorema van Whitney, volgens hetwelk iedere differentieerbare veelvuldigheid opgevat kan worden als een gesloten deel-veelvuldigheid van de n-dimensionale euclidische ruimte, mits n voldoende groot is. In de resterende vier hoofdstukken komen enkele bijzondere onderwerpen ter sprake, zoals de Lie-groepen en hun ondergroepen met één parameter, produkten van veelvuldigheden (vezel-bundels) en multilineaire algebra.

Deze opsomming maakt het reeds duidelijk dat het boek bestemd is voor lezers die vertrouwd zijn met moderne differentiaalmeetkunde en met topologie. Voor hen is deze inleiding een mooi boek, dat vaak een verrassend nieuw inzicht in meetkundige problemen biedt.

W. J. Claas

Dr. Joseph Hofmann, *Geschichte der Mathematik I*, „*Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes*", Walter de Gruyter, Berlin, 1963, Sammlung Göschen, Bd 226/226a, 2. verbesserte und vermehrte Auflage, 251 Seiten.

Es ist sehr zu begrüssen, dasz Herr Dr. Hofman, Professor der Mathematikgeschichte an der Universität Tübingen, Autor einer Mathematikgeschichte in drei Bänden, sich dazu entschloss, Band I in bereicherter Form neu zu veröffentlichen.

Das schwierige Unternehmen, ein so umfassendes Gebiet auf kleinem Raum prägnant darzustellen, ist Professor Hofmann glänzend gelungen. Bei dieser natürlich gedrängten Übersicht über die Mathematikgeschichte ist der Hauptwert auf die Entwicklung der Konzepte und der Methoden gelegt. Wissenschaftliche Gründlichkeit ist mit Lebendigkeit der Darstellung gepaart.

Die zweite Auflage von Band I, die wiederum die ganze Meisterschaft des Autors

zeigt, unterscheidet sich von der ersten durch Ergänzungen über die Mathematik der Babylonier, die Entdeckung der Irrationalen, die Mathematik der Muslime, der Chinesen und der Byzantiner. Ein sehr ausführliches Namen- und Schriftenverzeichnis macht dem Leser des Werkchens auf die Originalliteratur aufmerksam. Ein Sachregister erleichtert seine Benutzung.

Wir bringen in Erinnerung dass der II. Teil, Sammlung Göschen, 1957, Band 875, 109 Seiten, den Titel trägt: „Von Fermat und Descartes bis zur Erfindung des Calculus und bis zum Ausbau der neuen Methoden", und der III. Teil, 1957, Band 882, 107 Seiten, betitelt ist: „Von den Auseinandersetzungen um den Calculus bis zur französischen Revolution".

Das Studium dieser Mathematikgeschichte kann man jedem Mathematiklehrer wärmstens empfehlen.

Ein IV. Teil: „Geschichte der Mathematik der neuesten Zeit" von N. Stuloff ist in Vorbereitung.

Dr. A. Gloden (Luxembourg)

G. ten Doesschate, *Benedictus de Spinoza, Algebraic Calculation of the Rainbow*, Dutch Classics on History of Science V (published under supervision of the Netherlands Society for History of Medicine, Mathematics and Exact Sciences); B. de Graaf, Nieuwkoop, 1963, 26 blz. + facsimile (24 blz.), *f* 32.—.

De schrijver is de lezers van Euclides reeds bekend door zijn artikelen over het waarnemen van evenwijdigheid en over de schildersperspectief in de jaargangen 35 en 36. In dit werkje gaat hij de geschiedenis na van de verklaring van de regenboog. In de oudheid verklaart Aristoteles het ontstaan ervan door terugkaatsing van van het oog uitgaande stralen tegen regendruppels. Daarnaast vinden we een stoïcijnse verklaring, die berust op terugkaatsing van zonnestralen tegen een als concave spiegel werkende wolk. Omstreeks 1200 werd voor het eerst het ontstaan van de regenboog in verband gebracht met refractie (Grosseteste), terwijl een eeuw later een Arabische theorie spreekt van het ontstaan van de boog doordat de lichtstralen van de zon twee maal gebroken en één keer teruggekaatst worden, terwijl de secundaire boog ontstaat, doordat sommige stralen twee maal gebroken en twee maal teruggekaatst worden. Merkwaardigerwijs geraakt deze theorie in het vergeetboek om eerst 300 jaar later weer op te duiken bij De Dominis. Deze bevestigde de juistheid van zijn theorie door experimenten te nemen met licht, dat door een met water gevulde bol viel. De Dominis verklaarde langs deze weg echter alleen het ontstaan van de primaire boog; Descartes gaf ook de verklaring van de secundaire boog door dubbele reflectie. Het is in hoofdzaak deze geometrisch-optische verklaring van de beide bogen door Descartes, welke Spinoza in zijn geschrift op zodanige wijze heeft willen uiteenzetten, dat ze algemeen toegankelijk werd. Van een bevredigende verklaring van de kleuren is nog geen sprake. Eerst Newton schreef dit toe aan verschillende breekbaarheid van licht van verschillende kleur. Wie nadere details wenst te weten, moet trachten dit aardige boekje zelf in handen te krijgen. Jammer, dat een dergelijke uitgave zo duur moet zijn.

P. G. J. Vredenduin

Prof. Dr. Hans-Joachim Kowalsky, *Lineare Algebra*; Göschens Lehrbücherei, Band 27; Walter de Gruyter & Co., Berlin 1963, 340 blz., DM 48.—.

Men vindt in dit boek allereerst een algemene inleiding in de lineaire algebra. Daarop volgt een selectie uit de vele onderwerpen, die met behulp van lineaire algebra behandeld kunnen worden, zoals vergelijkingen, determinanten, affiene,

projectieve, euclidische en unitaire ruimten. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan polynomen van endomorfismen. Verder zijn enige begrippen, die noodzakelijk zijn voor de ontwikkeling van de multilineaire algebra, in aparte hoofdstukken besproken, zoals quotiëntruimte, directe som, duale ruimte. In een slothoofdstuk komt de multilineaire algebra aan de orde, waarbij behalve de tensoren ook de uitwendige produkten ter sprake gebracht worden.

Het is een uitstekend boek. Toch zou ik het niet willen aanbevelen aan degenen, die zich nog nimmer met lineaire algebra hebben beziggehouden. Voor hen is het wel een zware kluif. Maar voor iemand, die wel eens een en ander over lineaire algebra gelezen heeft, is bestudering van dit boek een voortreffelijke methode om zijn verworven kennis te consolideren en uit te breiden. Het boek gaat, zoals wiskundige studieboeken veelal doen, recht op het doel af. Nieuwe begrippen worden gedefinieerd en er worden stellingen over afgeleid, zonder dat veel ruimte besteed is aan een explicatie van inhoud en draagwijdte van het begrip. Maar de behandeling is zo helder en de bewijzen zijn zo duidelijk gestructureerd, dat men zich met enige inspanning de betekenis van de begrippen zelf wel eigen maakt, voorzover men deze nog niet kent. In het bijzonder is mij opgevallen de fraaie behandeling van de affiene en de projectieve meetkunde. Het minst enthousiast ben ik over het laatste hoofdstuk. De behandeling van de multilineaire algebra is wat zwaarwichtig, zodat men hier een nadere explicatie wel eens mist.

Degene, die door zelfwerkzaamheid het verkregen inzicht wil toetsen, vindt aan het einde van iedere paragraaf een bescheiden aantal vraagstukken. De oplossingen staan achterin het boek.

P. G. J. Vredenduin

H. Hermes, *Einführung in die mathematische Logik*, B. G. Teubners Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1963, 187 blz., ƒ 29.60.

Dit boek heet niet alleen „Einführung", maar is ook inderdaad een inleiding in de problemen van de mathematische logica. Tot blz. 50 vindt men een niet formele uiteenzetting van de problemen, waarom het in wezen gaat. Eerst dan begint een systematische behandeling van de beginselen van de logica.

De schrijver behandelt niet eerst de propositierekening, maar begint direct met de predikatenberekening van de eerste orde (d.i. zonder gebonden predikatenvariabelen). Hij bouwt deze op alleen met behulp van de operatoren $\neg$ (niet) en $\wedge$ (en) en de kwantor $\bigwedge_x$ (voor alle x:), hetgeen de overzichtelijkheid bevordert. De hoofdzaken van de behandeling bestaan uit:

a. een definitie van „uit A volgt B". Deze luidt: als elk model van A ook een model van B is, dan volgt B uit A. Dit is dus een semantische definitie.

b. een definitie van „uit A is B afleidbaar". De schrijver geeft een aantal afleidingsregels, welke deze afleidbaarheid bepalen. Dit is een syntactische definitie.

c. Ten slotte wordt bewezen, dat „uit A volgt B" en „uit A is B afleidbaar" ekwivalente uitspraken zijn.

Dit deel beslaat 90 blz. M.i. moet men bij het lezen kans zien hier en daar van de zonder twijfel correcte en noodzakelijke, formele uiteenzettingen van de schrijver een en ander over te slaan, als men zich wil blijven amuseren.

In een kort hoofdstuk van slechts 17 blz. worden ten slotte op snelle en fraaie manier pakkende resultaten bereikt. Het blijkt, dat de natuurlijke getallen volgens de door Peano ontworpen methode zich laten axiomatiseren in de predikatenrekening van de tweede orde (met gebonden predikatenvariabelen) zo, dat alle modellen van

dit axiomastelsel isomorf zijn [1]). Verder blijkt dit niet mogelijk te zijn, als we het axiomastelsel vervangen door een stelsel, dat geformuleerd is in de predikatenrekening van de eerste orde (met oneindig veel axioma's). En in verband hiermee blijkt, dat het niet mogelijk is een uitspraak, zoals sub c geformuleerd is, voor de predikatenrekening van de tweede orde te bewijzen. D.w.z. het is niet mogelijk daar afleidingsregels te ontwerpen zo, dat de afleidbaarheid samenvalt met het semantische „volgen uit".

Ik zou dit boek niet willen aanraden aan iemand, die met de mathematische logica nog in het geheel geen kennis gemaakt heeft. Voor hen, die er iets van weten en hun kennis beter willen funderen, is het een waardevol boek.

P. G. J. Vredenduin

Wiskunde in de 20e eeuw, 2, 269 blz., 75 B.F. Te verkrijgen bij: Het Ministerie van Nationale Opvoeding en Cultuur, Dienst verkoop van publikaties, Etterbeekse Steenweg 62, Brussel.

Men vindt in dit boek de inhoud van de lezingen, die gehouden zijn op de tweede internationale perfectioneringscursus voor doctoren en licentiaten in de wiskunde te Brussel op 24—30 augustus 1961, onder leiding van Dr. J.-J. van Hercke.

Beth laat zien, hoe zijn het vorige jaar besproken methode der semantische tableaus toegepast kan worden in de logica der kwantoren. Verder ontwikkelt hij een zwakke axiomatische fundering van de rekenkunde, die de merkwaardige eigenschap heeft, dat alle effectief verkrijgbare rekenresultaten er stuk voor stuk in afleidbaar zijn, maar waarin eenvoudige algemene wetten, zoals de commutativiteit van de optelling reeds onbewijsbaar blijken.

Borgers (Leuven) zet in een vrij uitvoerig artikel de beginselen van de propositielogica en van de predikatenlogica uiteen. Voor degenen, die met dit onderwerp niet vertrouwd zijn, is dit artikel van groot belang. Daarna volgt nog een behandeling van het principe van de volledige inductie en het bewijs dat dit principe ekwivalent is met verschillende analoge principes. Bij de bewijzen van deze ekwivalenties wordt de formele logica gebruikt, zodat de lezer van het eerste artikel ruimschoots gelegenheid krijgt de verkregen kennis in praktijk te brengen.

De Siebenthal (Lausanne) geeft een proeve ter vernieuwing der beschrijvende meetkunde. Wie dit artikel gaat lezen met de vooringenomenheid, dat nu een oude koe uit de sloot gehaald wordt, komt bedrogen uit. De grondbeginselen van het projecteren worden eerst algemeen op moderne wijze beschreven. Nadat men zo een inzicht gekregen heeft in het wezen van de beschrijvende meetkunde, volgen enige toepassingen op speciale projectiemethoden.

In een voortreffelijk artikel bespreekt Hirsch (Brussel) enige vraagstukken in verband met de functionaalanalyse. Ter sprake komt o.a. de toevoeging van een getal aan een functie f door middel van de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\psi(x)\,dx$, en de omgekeerde vraag bij een dergelijke toevoeging een functie $\psi(x)$ te vinden. Daarna worden allerlei aardige eigenschappen van deze functionalen (toevoegingen) uiteengezet.

In een inleiding tot de vectorruimten bespreekt Papy (Brussel) de grondbeginselen van de lineaire algebra op een meesterlijke manier. Zijn toelichtingen aan de hand van concrete voorbeelden over verkoop van goederen zijn zeer verhelderend.

---

[1]) Dit resultaat is opmerkelijk, omdat het axiomastelsel niet volledig kan zijn. D.w.z. er is zeker een uitspraak P met de eigenschap, dat zowel P als $\neg P$ met de axioma's verenigbaar is.

Van Albada geeft een axiomastelsel voor de hyperbolische meetkunde, dat de incidentie in het platte vlak en de ordening beschrijft. Een twintigtal stellingen wordt eruit afgeleid en de onafhankelijkheid van de axioma's wordt bewezen.

Van der Corput bespreekt de door hem ontworpen neutrixrekening. Om (erg) kort te gaan komt het hierop neer. Een neutrix is een verzameling functies, die een additieve groep vormen en waartoe geen andere constante functie behoort dan de functie, die identiek 0 is. We beschouwen nu oneindige sommen, die convergent of divergent mogen zijn. Deze stellen we voor door de som van een eindig deel en een functie, die tot een bepaalde neutrix behoort. De neutrix is nu een generalisatie van het staartstuk van een convergente reeks, dat verwaarloosd mag worden, omdat het kleiner dan ε is. Als men van geschikte neutrices gebruik maakt, blijkt het dat verschillende rekenwijzen gegeneraliseerd kunnen worden voor divergente reeksen, zoals het term voor term differentiëren.

Ten slotte vermeld ik nog een pittig artikel van Van der Blij over algebraïsche en analytische methoden in de getaltheorie, een m.i. te compact geschreven bijdrage van Libois (Brussel) over meetkunde der beperkte relativiteit, een artikel van Deprit (Leuven) over een onderwerp uit de mechanica (storingen) en van Teghem (Brussel) over processen van Markov.

Al met al vindt de liefhebber voor weinig geld een schat van wetenswaardigheden, waar stellig iets bij is, dat hem sterk zal interesseren.

P. G. J. Vredenduin

Dr. R. Broeckx en Lic. F. van Roey, *Algebra II en Analyse GL*, Antwerpen, De Nederlandse Boekhandel 1963, 247 blz.

Na een inleiding over functies, volgt het begrip toename van een functie, dan uitvoerige limiet-beschouwingen en eerst veel later de theorie van de afgeleide. Deze volgorde heeft beslist voordelen, daar de moeilijkheden gesplitst worden. Behalve de afgeleiden van de zelfde functies als bij ons, worden bovendien die van log x, bg sin x, e^x bepaald. Bij de integraalrekening worden ook behandeld partiële integratie en de substitutie-methode.

Er zijn veel toepassingen op de meetkunde en verschillende op de natuurkunde.

P. Bronkhorst

R. Pelsmakers, *Analyse II*, hogere cyclus, 228 blz., Antwerpen, De Nederlandse Boekhandel, 1963.

Het verschil tussen rij en reeks wordt hier zeer consequent toegepast. Zo staat er: 1, 2, 3, 4 vormen een rekenkundige rij, $1 + 2 + 3 + 4$ is een rekenkundige reeks, men kan dus niet de termen van een rij optellen, want bij het verschijnen van plus-tekens, is de rij in een reeks veranderd. Wel is er weer de rij van partieelsommen van de termen van een reeks. Het lijkt eerst vreemd, maar het is stellig de moeite waard om de voordelen te overwegen. Het hoofdstuk over oneindige reeksen is veel omvattender dan bij ons: convergentie-kenmerken, middelwaarde-stelling, machtreeks van Maclaurin, restterm, formule van Euler, hyperbolische functies enz., enz. Verder benadering van de wortels van een vergelijking, het begrip differentiaal. Ook de hoofdstukken over integraal-rekening zijn veel uitvoeriger dan in Nederland. Een eerste-jaarsstudent kan er veel oefenmateriaal in vinden, maar op onze scholen komen al deze dingen niet voor.

Tot slot zijn er dan diverse toepassingen op de natuurkunde.

P. Bronkhorst

L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Ledenvergadering op vrijdag 28 augustus 1964
om 14.30 uur in Gebouw „Op Gouden Wieken",
Scheveningseweg 37 te Scheveningen.

Agenda.

1. Opening.
2. Notulen. (hieronder gepubliceerd)
3. Verslag kascommissie.
4. Bestuursverkiezing. (Aftredend: Dr. J. C. van der Steen, die zich herkiesbaar stelt. Tegenkandidaten kunnen voor 1 augustus a.s. worden opgegeven bij de secretaris.)
5. Voordracht door de heer Ir. J. R. D. Stoute, Bergen N.H., over: „*Oude en nieuwe atoomreactoren*".
6. Pauze.
7. Voordracht door de heer A. F. van Tooren, Den Haag, over: „*Een algebra-experiment*".
8. Rondvraag.
9. Sluiting.

Thorbeckestraat 47,
Delft.

D. LEUJES, secretaris.

Notulen van de ledenvergadering op vrijdag 30 augustus 1963
om 14.30 uur in het Centrum „Hydepark" te Driebergen

De voorzitter, Dr. P. G. J. Vredenduin opende de vergadering en sprak een bijzonder woord van welkom tot de heren Drs. B. J. Westerhof (inspecteur V.H.M.O.), Drs. J. F. Hufferman (Wimecos), Drs. H. C. Vernout (Wiskunde-werkgroep W.V.O.), Drs. S. Roodenburg en J. W. Koning (bestuursleden Genootschap).

De notulen van de vorige ledenvergadering worden ongewijzigd goedgekeurd.

Van de niet-aanwezige kascommissie was geen verslag binnengekomen, zodat de penningmeester onder voorbehoud werd gedetacheerd.

Vervolgens was het woord aan de eerste spreker, de heer R. Troelstra, die een voordracht hield over: „*Transformatiemeetkunde in de lagere klassen van het V.H.M.O.*". Deze voordracht zal in Euclides gepubliceerd worden. Na een geanimeerde discussie sprak de voorzitter zijn waardering uit voor het werk van de heer Troelstra en zijn collega's en dankte hij namens de aanwezigen de spreker hartelijk voor zijn bijdrage aan deze Liwenagelvergadering.

Na de thee kwam een andere „brandende kwestie" aan de orde: de heer Bruno Ernst sprak over: „*Is invoering van de rekenliniaal bij het V.H.M.O gewenst?*" Ook deze voordracht zal in Euclides verschijnen. Zoals te verwachten was, bleek bij de discussie, dat er voor- en tegenstanders van invoering van de rekenliniaal bij het V.H.M.O. waren. Mogelijk zijn enkele tegenstanders door het pleidooi van de heer Bruno Ernst bekeerd. Hoewel de voorzitter verklaarde een tegenstander op emotionele gronden te zijn, was hij de heer Bruno Ernst toch zeer erkentelijk voor zijn bereidwilligheid voor Liwenagel te komen spreken en hij dankte hem namens de vergadering voor zijn betoog.

Daarna vertelde de secretaris iets over de enquête betreffende het mondeling eindexamen wiskunde gymnasium-B. Duidelijk was gebleken, dat men 40 minuten voor drie onderdelen te kort had gevonden.

Naar aanleiding van het voorstel-Hilversum, dat op de agenda van de Genootschapsvergadering stond, merkte de voorzitter op, dat drie maal 20 minuten voor mondeling wiskunde-B bij de huidige totaal beschikbare examentijd zou kunnen betekenen: 21 examens op één dag. Daarom zou hij dit alleen acceptabel achten, als ook de totaal beschikbare examentijd wordt verlengd. Anders zou hij voor twee maal 20 minuten zijn; voor het niet-geëxamineerde onderdeel kan in twijfelgevallen altijd nog een verlengd examen worden aangevraagd. Voor deze opvatting bleek ook een meerderheid van de vergadering te voelen.

Tenslotte dankten de heren Westerhof en Hufferman — de laatste mede namens de heer Vernout — voor de ontvangen uitnodigingen.

Daarna sluiting.

De secretaris, D. Leujes

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

114. De volgende opgave lijkt een oude bekende, maar is toch de moeite van het oplossen wel waard.

a. Vijf personen (A, B, C, D, E), wier intelligentie en waarheidsliefde boven elke verdenking verheven zijn, staan achter elkaar. Men zet elk van hen een hoed op. De hoeden worden gekozen uit een collectie van vijf witte en vier zwarte. Ieder kan alleen zien, welke hoeden degenen op hebben, die voor hem staan. A ziet dus de hoeden van B, C, D en E; B ziet de hoeden van C, D en E, enz. Men vraagt nu eerst aan A, welke kleur hoed hij op heeft. A zegt, dat hij het niet weet. Men stelt nu dezelfde vraag achtereenvolgens aan B, C, D en E en krijgt telkens als antwoord, dat de betrokkene het niet weet. Gevraagd wordt, welke kleur hoed E op heeft. (B. Kootstra)

b. Situatie als onder a. Er zijn nu echter in de collectie drie witte, drie rode en één blauwe hoed. Op de vraag, welke kleur hoed ze op hebben, antwoordt A dat hij het niet weet, B dat hij het wel weet en C dat hij het niet weet. Wat antwoordt D en wat E?

115. Gegeven zijn een aantal congruente driehoeken, die de eigenschap hebben, dat ze met zijn vieren zo aan elkaar gepast kunnen worden, dat er een vierkant ontstaat. Het is ook mogelijk twintig van deze driehoeken zo aan elkaar te passen, dat er een vierkant ontstaat. Hoe is dit mogelijk?

OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

112. Door elk snijpunt gaan twee diagonalen, die vier hoekpunten als uiteinden hebben. Omgekeerd hoort bij elk viertal hoekpunten één zo'n snijpunt, nl. het snijpunt van de diagonalen van de convexe vierhoek, waarvan deze vier punten de hoekpunten zijn. Het gevraagde aantal is dus

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

113. Voor deze opgave wordt verwezen naar Korrel CXXII op blz. 310 in dit nummer.